VECTORES

Ejercicio nº 1.-

Consideramos la base de $\mathbb{V}^3$ fomada por los vectores $\vec{a}(2, 1, 3)$, $\vec{b}(0, 2, -1)$ y $\vec{c}(3, 0, 1)$.

a) Halla las coordenadas de $\vec{u}(4, -7, 14)$ respecto de la base anterior.

b) Expresa, si es posible, el vector $\vec{c}$ como combinación lineal de $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{u}$.

Ejercicio nº 2.-

a) Halla los valores de x, y, z tales que $x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \vec{0}$, siendo $\vec{u}(2, 0, -3)$, $\vec{v}(1, -2, 0)$ y $\vec{w}(3, 2, -6)$.

b) Son linealmente independientes los tres vectores anteriores? ¿Forman una base de $\mathbb{R}^3$?

Ejercicio nº 3.-

Dados los vectores $\vec{u}(2, -1, 0)$ y $\vec{v}(3, 2, -1)$:

a) ¿Son linealmente independientes?

b) ¿Forman una base de $\mathbb{R}^3$?

c) Halla un vector, $\vec{w}$, tal que $2\vec{u} + 3\vec{w} = \frac{1}{2}\vec{v}$.

Ejercicio nº 4.-

a) Se sabe que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes. ¿Podemos asegurar que $\vec{u}$ es combinación lineal de $\vec{v}$ y $\vec{w}$? Justifica tu respuesta.

b) Halla las coordenadas del vector $\vec{a}(4, 3, 7)$ respecto de la base $B = \{(2, 1, 0), (1, 0, -2), (0, 0, 3)\}$.

Ejercicio nº 5.-

Dados los vectores $\vec{a}(1, 2, 3)$, $\vec{b}(1, 1, 1)$, $\vec{c}(1, 0, 5)$ y $\vec{d}(-1, 1, 3)$:

a) ¿Forman una base de $\mathbb{R}^3$?

b) Expresa, si es posible, el vector $\vec{d}$ como combinación lineal de $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$.

PRODUCTO ESCALAR

Ejercicio nº 1.-

Dados los vectores $\vec{a}(1, -1, 0)$, $\vec{b}(0, 1, -1)$ y $\vec{c} = m\vec{a} - \vec{b}$:

a) Halla el valor de m para que $\vec{a}$ y $\vec{c}$ sean perpendiculares.

b) Para $m = 2$, halla el ángulo que forman $\vec{b}$ y $\vec{c}$.

Ejercicio nº 2.-

Dados los vectores $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$; $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$; halla x e y de forma que $\vec{c} = x\vec{i} + y\vec{j}$ sea perpendicular a $\vec{b}$ y tenga el mismo módulo que $\vec{a}$.

Ejercicio nº 3.-

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores que forman un ángulo de 45° y que tienen el mismo módulo, $|\vec{u}| = |\vec{v}| = 2$.

a) ¿Cuál es el módulo de $\vec{u}+\vec{v}$? ¿Y el de $\vec{u}-\vec{v}$?

b) Demuestra que $\vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{u}-\vec{v}$ son perpendiculares.

Ejercicio nº 4.-

Dados los vectores $\vec{u}(1, 0, 0)$ y $\vec{v}(1, 1, 0)$:

a) Halla la proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$, así como el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

b) Encuentra un vector $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, que sea combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y que sea perpendicular a (1, 0, 0).

Ejercicio nº 5.-

Dados los vectores $\vec{u}(2, -1, 3)$, $\vec{v}(4, 2, -2)$ y $\vec{w}(1, 2, x)$:

a) Halla $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ y el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

b) Obtén el valor de x para que $\vec{u}$ y $\vec{w}$ formen un ángulo de 60°.

PRODUCTO VECTORIAL

Ejercicio nº 1.-

Dados los vectores $\vec{u}(1, 3, 0)$ y $\vec{v}(2, 1, 1)$:

a) Halla un vector, $\vec{w}$, de módulo 1, que sea perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$.

b) ¿Cuál es el área del paralelogramo determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$?

Ejercicio nº 2.-

Halla el área de un paralelogramo determinado por los vectores $\vec{u}\times\vec{v}$ y $\vec{u}\times\vec{w}$, siendo: $\vec{u}(2, -1, 1)$, $\vec{v}(0, 1, -1)$ y $\vec{w}(1, 0, 1)$

Ejercicio nº 3.-

a) Halla un vector unitario que sea perpendicular a (3, –1, 1) y a (1, –2, 0).

b) ¿Es cierto que $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w} = \vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})$? Pon un ejemplo.

Ejercicio nº 4.-

a) Demuestra que, si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son dos vectores cualesquiera, se tiene que:

$$(\vec{u}-\vec{v})\times(\vec{u}+\vec{v}) = 2(\vec{u}\times\vec{v})$$

b) Halla un vector perpendicular a $\vec{u}(2, -1, 1)$ y a $\vec{v}(3, 0, -1)$.

Ejercicio nº 5.-

Halla el valor de m para que el área del paralelogramo determinado por $\vec{u}(2, 0, 1)$ y $\vec{v}(0, m, 1)$ sea 2.

PRODUCTO MIXTO

Ejercicio nº 1.-

a) Demuestra que los vectores $\vec{u}(k, -3, 2)$, $\vec{v}(k, 3, 2)$ y $\vec{w}(1, 0, 0)$ son linealmente independientes, cualquiera que sea el valor de k.

b) ¿Cuál es el volumen del paralelepípedo determinado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$?

Ejercicio nº 2.-

a) Calcula el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\vec{u}(2, -1, 1)$, $\vec{v}(3, 0, -2)$ y $\vec{w}(2, -3, 0)$.

b) ¿Cuánto valen cada uno de los siguientes productos mixtos?: $[2\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$; $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}+\vec{v}]$

Ejercicio nº 3.-

a) Halla los valores de m para que los vectores $\vec{u}(0, 1, 1)$, $\vec{v}(-2, 0, 1)$ y $\vec{w}(m, m-1, 1)$ sean linealmente independientes.

b) Estudia si el vector $(2, 1, 0)$ depende linealmente de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ para el caso $m = 3$.

Ejercicio nº 4.-

Dados los vectores $\vec{u}(1, 2, 3)$, $\vec{v}(1, 1, 1)$ y $\vec{w}(1, \lambda, 5)$; halla el valor de λ para que:

a) Determinen un paralelepípedo de volumen 10.

b) Sean linealmente dependientes.

Ejercicio nº 5.-

Dados los vectores $\vec{u}(1, 0, -1)$, $\vec{v}(0, 2, -1)$ y $\vec{w}(2, -2, 1)$, se pide:

a) El volumen del paralelepípedo determinado por ellos.

b) Halla, si existe, el valor de α para que el vector $\vec{a}(\alpha, \alpha, -6)$ se pueda expresar como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

SOLUCIONES EJERCICIOS VECTORES

Ejercicio nº 1.-

Consideramos la base de $\mathbb{R}^3$ formada por los vectores $\vec{a}(2,-1,3)$, $\vec{b}(0,2,-1)$ y $\vec{c}(3,0,1)$.

a) Halla las coordenadas de $\vec{u}(4,-7,14)$ respecto de la base anterior.

b) Expresa, si es posible, el vector $\vec{c}$ como combinación lineal de $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{u}$.

Solución:

a) Tenemos que encontrar tres números x, y, z, tales que:

$\vec{u} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$, es decir:

(4, 7, 14) = *x*(2, 1, 3), *y*(0, 2,1), *z*(3, 0, 1)

(4, 7, 14) = (2*x*, 3*z*, *x*, 2*y*, 3*x*, *y*, *z*)

$$\left.\begin{array}{l} 2x \quad +3z = 4 \\ -x+2y \quad = -7 \\ 3x \ -y \ +z = 14 \end{array}\right\} \text{ Lo resolvemos aplicando la regla de Cramer: } |A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -11$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 0 & 3 \\ -7 & 2 & 0 \\ 14 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-11} = \frac{-55}{-11} = 5; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & -7 & 0 \\ 3 & 14 & 1 \end{vmatrix}}{-11} = \frac{11}{-11} = -1;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & -7 \\ 3 & -1 & 14 \end{vmatrix}}{-11} = \frac{22}{-11} = -2. \quad \textit{Solución}: \quad x = 5,\ y = -1,\ z = -2$$

Por tanto, las coordenadas de $\vec{u}$ respecto de la base dada son $(5, -1, -2)$, es decir:

$\vec{u} = 5\vec{a} - \vec{b} - 2\vec{c}$

b) De la igualdad obtenida en a), tenemos que:

$$\vec{u} = 5\vec{a} - \vec{b} - 2\vec{c} \ \rightarrow \ 2\vec{c} = 5\vec{a} - \vec{b} - \vec{u} \ \rightarrow \ \vec{c} = \frac{5}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{u}$$

Ejercicio nº 2.-

a) Halla los valores de x, y, z tales que $x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \vec{0}$, siendo $\vec{u}(2, 0, -3)$, $\vec{v}(1, -2, 0)$ y $\vec{w}(3, 2, -6)$.

b) Son linealmente independientes los tres vectores anteriores? ¿Forman una base de $\mathbb{R}^3$?

Solución:

a) *x*(2, 0, -3) + *y*(1, -2, 0) +*z*(3, 2, -6) = (0, 0, 0)

$(2x+y+3z,\ \ -2y+2z,\ \ -3x-6z)=(0,0,0)$

$$\left.\begin{aligned} 2x+y+3z&=0\\ -2y+2z&=0\\ -3x\qquad -6z&=0\end{aligned}\right\} \quad |A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3\\ 0 & -2 & 2\\ -3 & 0 & -6\end{vmatrix}=0 \quad \begin{vmatrix} 0 & -2\\ -3 & 0\end{vmatrix}=-6\neq 0$$

Para resolver el sistema, podemos prescindir de la 1ª ecuación y pasar la z al 2º miembro:

$$\left.\begin{aligned} -2y&=-2z\\ -3x&=6z\end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} y&=z\\ x&=-2z\end{aligned}\right\} \quad \textit{Soluciones}:\ x=-2\lambda,\ y=\lambda,\ z=\lambda$$

b) Según los resultados obtenidos en el apartado a), deducimos que los vectores son linealmente dependientes. Por tanto, no son base.

<u>Ejercicio nº 3.-</u>

Dados los vectores $\vec{u}(2,-1,0)$ y $\vec{v}(3,2,-1)$:

a) ¿Son linealmente independientes?

b) ¿Forman una base de $\mathbb{R}^3$?

c) Halla un vector, $\vec{w}$, tal que $2\vec{u}+3\vec{w}=\frac{1}{2}\vec{v}$.

Solución:

a) Sí son linealmente independientes, puesto que si escribimos:

$x(2,-1,0)+y(3,2,-1)=(0,0,0)$, es decir:

$$\left.\begin{aligned} 2x+3y&=0\\ -x+2y&=0\\ -y&=0\end{aligned}\right\}$$

este sistema solo tiene la solución trivial:

$x=y=0$

b) No forman una base de $\mathbb{R}^3$, pues para obtener una base de $\mathbb{R}^3$ necesitamos tres vectores (linealmente independientes).

c) $2\vec{u}+3\vec{w}=\frac{1}{2}\vec{v} \ \rightarrow\ 3\vec{w}=\frac{1}{2}\vec{v}-2\vec{u} \ \rightarrow\ \vec{w}=\frac{1}{6}\vec{v}-\frac{2}{3}\vec{u}$

Por tanto:

$$\vec{w}=\frac{1}{6}(3,2,-1)-\frac{2}{3}(2,-1,0)=\left(\frac{-5}{6},1,\frac{-1}{6}\right)$$

<u>Ejercicio nº 4.-</u>

a) Se sabe que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes. ¿Podemos asegurar que $\vec{u}$ es combinación lineal de $\vec{v}$ y $\vec{w}$? Justifica tu respuesta.

b) Halla las coordenadas del vector $\vec{a}(4,3,7)$ respecto de la base $B=\{(2,1,0),\ (1,0,-2),\ (0,0,3)\}$.

Solución:

a) No. Por ejemplo, si tomamos $\vec{u}(1, 0, 0)$, $\vec{v}(0, 1, 0)$, y $\vec{w}(0, 2, 0)$:

– Son linealmente dependientes, pues $\vec{w} = 2\vec{v}$.

– Sin embargo, $\vec{u}$ no es combinación lineal de $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

b) Llamamos $\vec{b}(2, 1, 0)$, $\vec{c}(1, 0, -2)$, $\vec{d}(0, 0, 3)$ a los vectores de la base *B*. Tenemos que encontrar tres números, x, y, z, tales que:

$$\vec{a} = x\vec{b} + y\vec{c} + z\vec{d}$$

Es decir:

$$(4, 3, 7) = x(2, 1, 0) + y(1, 0, -2) + z(0, 0, 3)$$

$$(4, 3, 7) = (2x + y, \quad x, \quad -2y + 3z)$$

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y = 4 \\ x = 3 \\ -2y + 3z = 7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 3 \\ y = 4 - 2x = -2 \\ 3z = 7 + 2y \quad \rightarrow \quad z = \dfrac{7 + 2y}{3} = 1 \end{array}$$

Las coordenadas de $\vec{a}$ respecto de la base *B* son $(3, -2, 1)$, es decir:

$$\vec{a} = 3\vec{b} - 2\vec{c} + \vec{d}$$

<u>Ejercicio nº 5.-</u>

Dados los vectores $\vec{a}(1, 2, 3)$, $\vec{b}(1, 1, 1)$, $\vec{c}(1, 0, 5)$ y $\vec{d}(-1, 1, 3)$:

a) ¿Forman una base de $\mathbb{R}^3$?

b) Expresa, si es posible, el vector $\vec{d}$ como combinación lineal de $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$.

Solución:

a) No forman una base, pues cuatro vectores en $\mathbb{R}^3$ siempre son linealmente dependientes.

b) Debemos encontrar tres números, x, y, z, tales que:

$$\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$$

Es decir:

$$(-1, 1, 3) = x(1, 2, 3) + y(1, 1, 1) + z(1, 0, 5)$$

$$(-1, 1, 3) = (x + y + z, \quad 2x + y, \quad 3x + y + 5z)$$

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = -1 \\ 2x + y = 1 \\ 3x + y + 5z = 3 \end{array}\right\} \text{Lo resolvemos aplicando la regla de Cramer:}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -6$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{-12}{-6} = 2 \; ; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{18}{-6} = -3 \; ; \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{0}{-6} = 0$$

Por tanto: $x = 2, \; y = -3, \; z = 0$

Y así: $\vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + 0\vec{c}$

PRODUCTO ESCALAR

Ejercicio nº 1.-

Dados los vectores $\vec{a}(1, -1, 0)$, $\vec{b}(0, 1, -1)$ y $\vec{c} = m\vec{a} - \vec{b}$:

a) Halla el valor de m para que $\vec{a}$ y $\vec{c}$ sean perpendiculares.

b) Para $m = 2$, halla el ángulo que forman $\vec{b}$ y $\vec{c}$.

Solución:

a) $\vec{c} = m\vec{a} - \vec{b} = m(1, -1, 0) - (0, 1, -1) = (m, -m-1, 1)$

$$\vec{a} \perp \vec{c} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{c} = (1, -1, 0) \cdot (m, -m-1, 1) = m + m + 1 = 2m + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad m = -\frac{1}{2}$$

b) Para $m = 2$, queda $\vec{c}(2, -3, 1)$. Si llamamos α al ángulo que forman $\vec{b}$ y $\vec{c}$, tenemos que:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{b}| \cdot |\vec{c}|} = \frac{-4}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{14}} = \frac{-4}{\sqrt{28}} \approx 0{,}76 \quad \rightarrow \quad \alpha = 139^\circ \; 27' \; 51''$$

Ejercicio nº 2.-

Dados los vectores $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$; $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$; halla x e y de forma que $\vec{c} = x\vec{i} + y\vec{j}$ sea perpendicular a $\vec{b}$ y tenga el mismo módulo que $\vec{a}$.

Solución:

$\vec{a}(2, -1, 0) \qquad \vec{b}(1, 2, -1) \qquad \vec{c}(x, y, 0)$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{c} \perp \vec{b} \;\rightarrow\; \vec{c} \cdot \vec{b} = 0 \;\rightarrow\; x + 2y = 0 \\ |\vec{c}| = |\vec{a}| \;\rightarrow\; \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{5} \;\rightarrow\; x^2 + y^2 = 5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = -2y \\ 4y^2 + y^2 = 5 \end{array}$$

$$5y^2 = 5 \quad \to \quad y^2 = 1 \quad \to \quad \begin{cases} y = -1 \quad \to \quad x = 2 \\ y = 1 \quad \to \quad x = -2 \end{cases}$$

Hay dos soluciones:

- $x = 2,\ y = -1,$ que corresponde a $\vec{c}(2, -1, 0)$.
- $x = -2,\ y = 1,$ que corresponde a $\vec{c}(-2, 1, 0)$.

Ejercicio nº 3.-

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores que forman un ángulo de 45° y que tienen el mismo módulo, $|\vec{u}| = |\vec{v}| = 2$.

a) ¿Cuál es el módulo de $\vec{u} + \vec{v}$? ¿Y el de $\vec{u} - \vec{v}$?

b) Demuestra que $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$ son perpendiculares.

Solución:

a) $$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|^2 + 2 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2 =$$

$$= 4 + 2 \cdot |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + 4 = 4 + 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 4 = 8 + 4\sqrt{2} \quad \to$$

$$\to \quad |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{8 + 4\sqrt{2}} \approx 3{,}70$$

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = |\vec{u}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2 = 4 - 2 \cdot |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos 45^\circ + 4 = 8 - 4\sqrt{2}$$

$$|\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{8 - 4\sqrt{2}} \approx 1{,}53$$

b) $$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2 = 4 - 4 = 0$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \perp (\vec{u} - \vec{v})$$

Ejercicio nº 4.-

Dados los vectores $\vec{u}(1, 0, 0)$ y $\vec{v}(1, 1, 0)$:

a) Halla la proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$, así como el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

b) Encuentra un vector $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, que sea combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y que sea perpendicular a (1, 0, 0).

Solución:

a) *Proyección de* $\vec{u}$ *sobre* $\vec{v} = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Si llamamos α al ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$, tenemos que:

$$cos\ \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \rightarrow \quad \alpha = 45^o$$

b) Un vector que sea combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es de la forma $a\vec{u} + b\vec{v}$, es decir:

$$a\vec{u} + b\vec{v} = a(1,\ 0,\ 0) + b(1,\ 1,\ 0) = (a + b,\ b,\ 0)$$

Para que sea perpendicular a (1, 0, 0), su producto escalar ha de ser cero:

$(a + b,\ \ b,\ \ 0) \cdot (1,\ 0,\ 0) = 0 \quad \rightarrow \quad a + b = 0 \quad \rightarrow \quad b = -a$

Por tanto, cualquier vector de la forma:

$(0,\ b,\ 0)$, con $b \neq 0$ cumple las condiciones exigidas.

Ejercicio nº 5.-

Dados los vectores $\vec{u}(2,\ -1,\ 3)$, $\vec{v}(4,\ 2,\ -2)$ y $\vec{w}(1,\ 2,\ x)$:

a) Halla $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ y el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

b) Obtén el valor de x para que $\vec{u}$ y $\vec{w}$ formen un ángulo de 60^o.

Solución:

a) $|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{14} \approx 3{,}74$

$|\vec{v}| = \sqrt{4^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{24} \approx 4{,}90$

Si llamamos α al ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$, tenemos que:

$$cos\ \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{8 - 2 - 6}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{u} \text{ y } \vec{v} \text{ son perpendiculares, es decir, } \alpha = 90^o.$$

b) Ha de cumplirse que:

$cos\ 60^o = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{w}|}$, es decir:

$$\frac{1}{2}=\frac{2-2+3x}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{5+x^2}} \quad\rightarrow\quad \frac{1}{2}=\frac{3x}{\sqrt{70+14x^2}}$$

$$\sqrt{70+14x^2}=6x \quad\rightarrow\quad 70+14x^2=36x^2 \quad\rightarrow\quad 70=22x^2$$

$$x^2=\frac{70}{22}=\frac{35}{11}\begin{cases} x=-\sqrt{\dfrac{35}{11}} & \text{(no vale, pues } \vec{u}\cdot\vec{v}=3x>0\text{)} \\ x=\sqrt{\dfrac{35}{11}} \end{cases}$$

PRODUCTO VECTORIAL

Ejercicio nº 1.-

Dados los vectores $\vec{u}(1, 3, 0)$ y $\vec{v}(2, 1, 1)$:

a) Halla un vector, $\vec{w}$, de módulo 1, que sea perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$.

b) ¿Cuál es el área del paralelogramo determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$?

Solución:

a) Un vector perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$ es:

$$\vec{u}\times\vec{v}=(1, 3, 0)\times(2, 1, 1)=(3, -1, -5)$$

Dividimos por su módulo para conseguir que tenga módulo 1:

$$\vec{w}=\frac{\vec{u}\times\vec{v}}{\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|}=\left(\frac{3}{\sqrt{35}}, \frac{-1}{\sqrt{35}}, \frac{-5}{\sqrt{35}}\right)$$

Hay dos soluciones: $\left(\dfrac{3}{\sqrt{35}}, \dfrac{-1}{\sqrt{35}}, \dfrac{-5}{\sqrt{35}}\right)$ y $\left(\dfrac{-3}{\sqrt{35}}, \dfrac{1}{\sqrt{35}}, \dfrac{5}{\sqrt{35}}\right)$

b) $\text{Área}=\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|=\sqrt{35}\approx 5{,}92\ \text{u}^2$

Ejercicio nº 2.-

Halla el área de un paralelogramo determinado por los vectores $\vec{u}\times\vec{v}$ y $\vec{u}\times\vec{w}$, siendo:
$\vec{u}(2, -1, 1)$, $\vec{v}(0, 1, -1)$ y $\vec{w}(1, 0, 1)$

Solución:

- Calculamos $\vec{u}\times\vec{v}$ y $\vec{u}\times\vec{w}$:

$$\vec{a}=\vec{u}\times\vec{v}=(0, 2, 2)$$

$\vec{b} = \vec{u} \times \vec{w} = (-1, -1, 1)$

- El área del paralelogramo determinado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es igual al módulo de su producto vectorial:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (0, 2, 2) \times (-1, -1, 1) = (4, -2, 2)$$

$$\textit{Área} = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 4 + 4} = \sqrt{24} \approx 4{,}90 \text{ u}^2$$

Ejercicio nº 3.-

a) Halla un vector unitario que sea perpendicular a (3, –1, 1) y a (1, –2, 0).

b) ¿Es cierto que $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$? Pon un ejemplo.

Solución:

a) Un vector perpendicular a los dos dados es:

$(3, -1, 1) \times (1, -2, 0) = (2, 1, -5)$

Dividiendo por su módulo, tendrá módulo 1:

$$\left(\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{-5}{\sqrt{30}} \right)$$

También cumple las condiciones su opuesto:

$$\left(\frac{-2}{\sqrt{30}}, \frac{-1}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}} \right)$$

b) En general, no es cierto. Por ejemplo:

$\vec{u} = (1, 0, 0) \qquad \vec{v} = (1, 0, 0) \qquad \vec{w} = (0, 1, 0)$

$$\left. \begin{array}{l} (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{0} \times \vec{w} = \vec{0} \\ \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{u} \times (0, 0, 1) = (1, 0, 0) \times (0, 0, 1) = (0, -1, 0) \end{array} \right\}$$

Por tanto, $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \neq \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$.

Ejercicio nº 4.-

a) Demuestra que, si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son dos vectores cualesquiera, se tiene que:

$$(\vec{u} - \vec{v}) \times (\vec{u} + \vec{v}) = 2(\vec{u} \times \vec{v})$$

b) Halla un vector perpendicular a $\vec{u}(2, -1, 1)$ y a $\vec{v}(3, 0, -1)$.

Solución:

a) $(\vec{u} - \vec{v}) \times (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \times \vec{u} + \vec{u} \times \vec{v} - \vec{v} \times \vec{u} - \vec{v} \times \vec{v} \overset{(*)}{=} \vec{0} + \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{v} - \vec{0} = 2(\vec{u} \times \vec{v})$

(*) Tenemos en cuenta que $\vec{u}\times\vec{u}=\vec{0}$ y que $\vec{u}\times\vec{v}=-\vec{v}\times\vec{u}$.

b) $u\times v=(2,\,-1,\,1)\times(3,\,0,\,-1)=(1,\,5,\,3)$

Ejercicio nº 5.-

Halla el valor de m para que el área del paralelogramo determinado por $\vec{u}(2,\,0,\,1)$ y $\vec{v}(0,\,m,\,1)$ sea 2.

Solución:

- El área del paralelogramo determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es igual a $|\vec{u}\times\vec{v}|$.

- Calculamos $\vec{u}\times\vec{v}$ y hallamos su módulo:

$$\vec{u}\times\vec{v}=(2,\,0,\,1)\times(0,\,m,\,1)=(-m,\,-2,\,2m)$$

$$|\vec{u}\times\vec{v}|=\sqrt{(-m)^2+(-2)^2+(2m)^2}=\sqrt{m^2+4+4m^2}=\sqrt{5m^2+4}$$

- Igualamos a 2:

$$Área=\sqrt{5m^2+4}=2\;\rightarrow\;5m^2+4=4\;\rightarrow\;5m^2=0\;\rightarrow\;m=0$$

PRODUCTO MIXTO

Ejercicio nº 1.-

a) Demuestra que los vectores $\vec{u}(k,\,-3,\,2)$, $\vec{v}(k,\,3,\,2)$ y $\vec{w}(1,\,0,\,0)$ son linealmente independientes, cualquiera que sea el valor de k.

b) ¿Cuál es el volumen del paralelepípedo determinado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$?

Solución:

a) Tenemos que probar que su producto mixto es distinto de cero, sea cual sea el valor de k.

$$[\vec{u},\,\vec{v},\,\vec{w}]=\begin{vmatrix} k & -3 & 2 \\ k & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-12\neq 0 \text{ para todo } k.$$

b) El volumen es igual al valor absoluto de su producto mixto. Por tanto:

$$Volumen = 12\ u^3$$

Ejercicio nº 2.-

a) Calcula el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\vec{u}(2, -1, 1)$, $\vec{v}(3, 0, -2)$ y $\vec{w}(2, -3, 0)$.

b) ¿Cuánto valen cada uno de los siguientes productos mixtos?:

$[2\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$; $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}+\vec{v}]$

Solución:

a) El volumen del paralelepípedo determinado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es igual al valor absoluto de su producto mixto:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -17 \quad \rightarrow \quad Volumen = 17 \text{ u}^3$$

b) Utilizando las propiedades de los determinantes, tenemos que:

$$[2\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 2[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 2 \cdot (-17) = -34$$

$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}+\vec{v}] = 0$ (el tercer vector depende linealmente de los dos primeros).

Ejercicio nº 3.-

a) Halla los valores de m para que los vectores $\vec{u}(0, 1, 1)$, $\vec{v}(-2, 0, 1)$ y $\vec{w}(m, m-1, 1)$ sean linealmente independientes.

b) Estudia si el vector $(2, 1, 0)$ depende linealmente de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ para el caso $m = 3$.

Solución:

a) Para que sean linealmente independientes, su producto mixto debe ser distinto de cero:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ m & m-1 & 1 \end{vmatrix} = 4 - m = 0 \quad \rightarrow \quad m = 4$$

Ha de ser $m \neq 4$.

b) Para $m = 3$, los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes, y forman una base de $\mathbb{R}^3$. Por tanto, cualquier vector de $\mathbb{R}^3$, en particular (2, 1, 0), depende linealmente de ellos.

Ejercicio nº 4.-

Dados los vectores $\vec{u}(1, 2, 3)$, $\vec{v}(1, 1, 1)$ y $\vec{w}(1, \lambda, 5)$; halla el valor de λ para que:

a) Determinen un paralelepípedo de volumen 10.

b) Sean linealmente dependientes.

Solución:

a) El volumen del paralelepípedo determinado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es igual al valor absoluto de su producto mixto:

$$[\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 5 \end{vmatrix} = 2\lambda - 6$$

$$\textit{Volumen} = |2\lambda - 6| = 10 \quad \begin{cases} 2\lambda - 6 = 10 \;\rightarrow\; 2\lambda = 16 \;\rightarrow\; \lambda = 8 \\ 2\lambda - 6 = -10 \;\rightarrow\; 2\lambda = -4 \;\rightarrow\; \lambda = -2 \end{cases}$$

Hay dos soluciones: $\lambda_1 = 8,\quad \lambda_2 = -2$

b) Su producto mixto ha de ser cero:

$$[\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}] = 2\lambda - 6 = 0 \;\rightarrow\; \lambda = 3$$

<u>Ejercicio nº 5.-</u>

Dados los vectores $\vec{u}(1, 0, -1)$, $\vec{v}(0, 2, -1)$ y $\vec{w}(2, -2, 1)$, se pide:

a) El volumen del paralelepípedo determinado por ellos.

b) Halla, si existe, el valor de α para que el vector $\vec{a}(\alpha, \alpha, -6)$ se pueda expresar como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Solución:

a) Es igual al valor absoluto de su producto mixto:

$$[\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \;\rightarrow\; \textit{Volumen} = 4\ u^3$$

b) Los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{a}$ han de ser linealmente dependientes ($\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente independientes); por tanto, su producto mixto ha de ser cero:

$$[\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{a}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ \alpha & \alpha & -6 \end{vmatrix} = 3\alpha - 12 = 0 \;\rightarrow\; \alpha = 4$$